

804
liv. 00000000/3

le qui rend l'attention plus nette et plus rapide.
Toutes les choses peuvent être employées seules à la
découverte des lois. C'est ainsi, par exemple, que les
Données de la Statistique, celles de l'observation astronomique
ou physique se peuvent être réunies et représentées dans
leur ensemble par une image qui est l'image de la
loi cherchée.

Cependant nos spéculations, sous peine de demeurer
Steriles, doivent aboutir à la communication, c'est à dire
se traduire par des signes extérieurs, dont le sens doit
être fixé une fois pour toutes et puisse être compris de
chacun. Les signes sont, en quelque sorte, l'image
des pensées, ils les rappellent et les gravent dans l'esprit.
Une fois que leur usage est devenu familier, ils assistent
puissamment les méditations en ramenant la combi-
naison des idées à celle d'un petit nombre de
symboles dont chacun exprime sous une forme
condensée tout un ensemble de matières. L'emploi
des signes, si fécond en mathématique, est susceptible
d'une bien plus grande efficacité dans les sciences supérieures.
On ne saurait se offrir méditer sur des sujets aussi
complexes si l'on ne commençait par grouper les
phénomènes d'après leurs affinités mutuelles, afin de
se servir plus à loisir que sur ces groupes, représentés
par des signes convenablement choisis (Ordre de bataille, N^{os} régiments).
On voit par là que la logique, conçue surtout comme

moyen d'invention, et par l'emploi, simultané ou successif, mais concordant, des intonations, des images et des signes. Il serait aisé de faire voir qu'il en est de même de la démonstration, laquelle consiste à relier entre elles, par des intermédiaires appropriés, deux propositions connues, mais disparates.

Historiquement, la logique initiale ou fétichique a été sentimentale; les phénomènes étaient appréciés et groupés d'après les émotions correspondantes. Puis, sous le régime polythéique, la logique des images apparaît à son tour. Au lieu de considérer le fait lui-même, d'une manière concrète, on s'attache à le représenter. Les Dieux ne sont qu'un produit de l'imagination, un premier degré d'abstraction, chacun d'eux est la représentation concrète d'une catégorie spéciale de phénomènes. Les lois naturelles prennent la forme de relations entre Dieux et génies.

Le régime monothéique donna un grand essor à l'usage des signes. Le monde étant conçu comme l'œuvre d'une seule volonté, que l'on dotait d'une sagesse infinie et d'une puissance sans bornes, il n'y avait plus, pour raisonner, qu'à déduire par voie de conséquence, les phénomènes particuliers de cette concept fondamentale (scolastique). C'est à cette époque, et dans ce milieu monothéique, que prennent naissance les sciences abstraites dues principalement à l'emploi des signes: l'algèbre et l'harmonie musicale.

Enfin, en jetant un regard sur l'individu, on voit que la logique passe chez lui par les mêmes phases que dans l'espèce, et dans le même ordre. L'enfant est d'abord fétichique, sa logique est celle des sentiments; un peu plus tard l'imagination s'éveille et sa logique prend le caractère des principes poéthiques. Ce n'est qu'à la fin qu'on observe chez les enfants l'emploi des signes; cette évolution s'accomplit de la naissance à la puberté, d'une manière spontanée et l'éducation ne doit avoir d'autre objet que d'en faciliter la marche, sans essayer de l'entraver, ni d'en altérer l'ordre. A partir de 14 ans, l'éducation devient systématique et développe la logique dans l'ordre inverse, plus convenable pour un enseignement dogmatique; la méthode historique serait trop longue.

La découverte de la vérité comprend trois opérations; l'induction, la déduction et la construction.

Induire, c'est trouver ce qu'il y a de constant dans des choses variables. Déduire, c'est montrer qu'un phénomène est contenu, comme cas particulier, dans un autre. Construire c'est rapprocher les choses d'après leur convenance. — La déduction n'est, au fond, que l'application du principe de contradiction, ou réduction à l'absurde. On fait voir que si le phénomène considéré n'était pas une conséquence du premier, il en

résulterait une absurdité. — Bien que la réduction soit très usitée en mathématique, il ne faudrait pas croire qu'elle y soit employée exclusivement. En réalité, la mathématique offre des types de tous les genres de méthode, ce qui lui vaudrait déjà le nom de logique. L'induction s'y rencontre à chaque pas; par exemple l'assimilation du cercle à un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits (méthode des limites), l'extension de cette conception à toutes les courbes (calcul infinitésimal).

La comparaison, dont la biologie fait son principal moyen, a son ébauche dans la classification des lignes et des surfaces. La filiation, enfin, méthode propre à la sociologie, se retrouve, quoique à l'état rudimentaire, en mathématique, dans la succession régulière et non fortuite, des découvertes (géométrie analytique, dynamique) dans l'usage des séries, &c.

Enfin, et pour achever de justifier cette qualification de logique, remarquons que la mathématique, par la nature des sujets qu'elle traite, et la certitude inébranlable qu'elle fournit, donne des habitudes de clarté, de précision et de consistance, et l'aversion de ce qui est obscur, vague et incohérent.

La mathématique, avons-nous dit, étudie la forme (géométrie) et le mouvement (mécanique).
A force d'établir des relations entre des longueurs

qui varient; des surfaces qui augmentent ou diminuent, des espaces parcourus avec des vitesses différentes, on finit par concevoir l'idée abstraite de variation, indépendamment de la nature des choses qui changent et l'on institue alors (algèbre) l'étude de la quantité. On appelle ainsi tout ce qui peut augmenter ou diminuer, autrement dit, éprouver des variations. L'objet de la science est de trouver des relations constantes entre des éléments variables préalablement mesurés.

L'idée qui revient perpétuellement est celle d'égalité. Par exemple, on a trouvé qu'entre la surface d'un cercle (représentée par la lettre y) et son rayon (représentée par la lettre x) existait une relation invariable. Quel que soit le cercle considéré, grand ou petit, la surface (Fig. 17 & 2.) est toujours égale, numériquement, au carré du rayon multiplié par un nombre constant. En désignant ce nombre fixe par la lettre A , on exprime cette relation en écrivant : $y = A \times x^2$

Si l'on considère une parabole, on trouve entre l'ordonnée y et l'abscisse x une relation de même forme, $y = Ax^2$, enfin dans le mouvement des corps pesants, l'espace y et le temps x , mesurés chacun avec l'unité convenable donneront encore une égalité semblable, $y = Ax^2$.

On voit par là que les lettres x et y peuvent

représenter tel ou tel objet, mais qu'il y a une chose qui mérite d'être considérée à part, c'est la forme que prend l'égalité ou, si l'on veut, la relation elle-même. Identique dans chacun de ces cas.

Mesurer une quantité, c'est la comparer à une autre de même nature avec laquelle on soit familier. Le résultat de la comparaison est un nombre.

La science des quantités abstraites, ou calcul, a donc pour but d'établir des égalités entre des nombres connus ou inconnus.

Celle de la forme, ou géométrie, se propose de trouver des égalités entre des longueurs, des surfaces et des volumes ou, plus généralement, entre des longueurs mesurées.

Celle du mouvement, ou mécanique, cherche des relations entre des espaces et des temps.

On voit que la généralité et l'abstraction décroissent d'une science à la suivante et que la complication augmente du même coup. Il est donc naturel de commencer par la science la plus abstraite, puisqu'elle est la moins difficile.

Le calcul étant l'étude de relations précises entre quantités mesurées, ou nombres, on voit de suite qu'il comporte une subdivision. D'une part l'étude des nombres et des opérations qu'ils nécessitent pour être combinés (évaluation), de l'autre, l'étude des relations et des transformations qu'elles comportent, sans que

leur caractère essentiel (égalité) soit altéré.

La première partie s'appelle arithmétique, la seconde prend le nom d'algèbre.

La distinction entre l'arithmétique et l'algèbre est toute moderne, ainsi que celle d'opérations sur les quantités, conçues d'une manière abstraite. Ce n'est qu'à la fin du 18^{ème} siècle qu'on a introduit dans la science ces deux conceptions; encore n'ont-elles pas un caractère bien net, le concret se trouvant encore trop confondu avec l'abstrait. Ex: Système des poids et mesures, règles de trois et d'intérêt, & (sociologie pratique).

L'arithmétique forme le début de la mathématique et fera l'objet du cours de cette année.

Quatre leçons seront consacrées à son appréciation générale, théorie subjective des nombres

Trois à son institution fondamentale, numération
Enfin, huit à sa coordination spéciale: théorie générale des évaluations.

Suivant le plan tracé par Auguste Comte dans sa Synthèse subjective.

La théorie subjective des nombres comprend tout ce qui a pu être tiré de l'arithmétique sans opérations et même sans numération (partie fétichique) et l'application des nombres à la réglementation des faits sociaux et moraux.

La systématisation de cette théorie sera précédée

De la position du point de vue historique qu'elle comporte.
Il convient de rechercher dans le passé les germes de
toutes nos institutions; c'est la liaison entre nos
premiers pas et nos conceptions actuelles qui donne à
celles-ci leur réalité.

I Appréciation générale Théorie subjective des nombres

La science mathématique, dont nous venons d'apprécier
sommairement le caractère général, est susceptible d'être
employée objectivement et subjectivement. En d'autres
termes, nous pouvons la faire servir tantôt à l'étude
du monde, en vue de le modifier à notre profit et, dans
ce cas, nous utilisons toutes les ressources logiques qu'elle
nous procure; tantôt à la réglementation de l'homme
et de la société; nous n'avons plus alors besoin que des
nombres, comme nous le verrons plus loin.

Au point de vue objectif, la science a un double résultat.
En premier lieu, elle améliore nos conceptions qui deviennent
un miroir de plus en plus fidèle du spectacle extérieur.
En second lieu, elle perfectionne nos actes, en nous
permettant de former des projets. Elle substitue, en effet,
aux tâtonnements primitifs la prévision, certaine et
quelquefois très précise, des résultats de notre intervention
modificatrice; elle nous fait reconnaître, en chaque cas,

([F. 17. 4. 2])

Les limites de notre puissance et nous montre à quelles conditions nous pouvons atteindre le but désiré. Prévoir l'avenir a été, de tout temps, la préoccupation suprême de l'humanité et l'on a préconisé à chaque époque des moyens plus ou moins illusoirs d'y parvenir; Il n'y en a qu'un seul, basé sur la science abstraite, c'est à dire sur la connaissance des lois immuables qui régissent les phénomènes. Ce n'est qu'après avoir attentivement observé comment les choses se sont passées pour chaque cas, dans la suite des temps, qu'on peut prédire ce qui arrivera dans un avenir déterminé.

Le mot phénomène signifie, pour le public, une chose exceptionnelle et étonnante. Dans le langage scientifique, il a une acception toute différente et sert à désigner ce qui arrive communément et à chaque instant. Il est synonyme de modification éprouvée. Tout changement qui se produit en nous et hors de nous est un phénomène.

L'observation la plus superficielle nous montre que certains phénomènes sont toujours accompagnés ou suivis d'autres phénomènes, analogues ou différents. Par exemple, tout changement dans le rayon d'un cercle est accompagné d'un changement de même sens dans la longueur de la circonférence dans l'étendue de la surface &c... tout changement dans la pression

que supporte un gaz et accompagné d'un changement dans le volume qu'il occupe; tout effort, musculaire ou cérébral, est suivi de l'afflux du sang dans l'organe qui fonctionne, et cet afflux sanguin détermine à son tour d'autres modifications dans la température, &c. &c.

+ Une telle connexité n'étant pas fortuite, mais se reproduisant constamment, il faut bien reconnaître une liaison entre les phénomènes, liaison telle qu'à chaque valeur assignée à l'intensité de l'un, correspond une valeur déterminée, toujours la même, de l'intensité de l'autre. On acquiert ainsi la notion de loi naturelle et par ce mot il faut entendre le mode régulier de variation d'un phénomène au moyen d'un autre ou, ce qui est la même chose, une relation constante entre éléments variables.

Il ne suffit pas de savoir, d'une manière vague, qu'il existe une relation entre deux phénomènes, il faut, en outre, trouver quelle est cette relation afin de diriger notre activité pratique et d'économiser nos efforts. Par exemple nous savons que la surface d'un cercle varie en même temps que son rayon, mais tant que nous ignorons la loi de cette variation, la connaissance que nous pouvons avoir de la longueur du rayon d'un cercle donné, ne nous indique rien relativement à sa surface. Pour connaître celle-ci, nous sommes contraints de la mesurer directement au moyen de l'unité de superficie, mais quand

nous apprenant que la surface est proportionnelle au carré du rayon, il nous suffit de déterminer, une fois pour toutes, le rapport constant ($\pi = 3,14159...$) entre la surface et le carré du rayon pour un cercle quelconque. Et ce rapport une fois évalué avec l'exactitude suffisante nous dispense pour toujours de la mesure directe de la surface; de même que, si nous connaissons la surface, il nous serait possible d'en déduire la longueur du rayon. En d'autres termes, et d'une manière générale, la connaissance de la relation qui existe entre deux phénomènes, nous permet de prévoir et souvent de calculer avec une précision plus ou moins grande, les variations d'intensité subies par l'un, quand nous connaissons les variations correspondantes de l'autre. Toutefois il est habituellement nécessaire pour cela de transformer la relation trouvée, en l'énonçant (formulant) d'une autre manière. C'est ici qu'intervient l'algèbre qui s'occupe des relations ou lois et de leurs transformations. Cette science est un véritable langage, apprenant à exprimer de toutes les façons possibles, la même pensée mathématique.

Reprenons notre exemple de tout à l'heure. Le rapport entre la surface d'un cercle, avons nous dit, et le carré de son rayon est un nombre constant, ce que nous exprimons algébriquement par P

L'équation : $\frac{S}{R^2} = \pi$

Cette équation ne nous indique nullement ce que deviennent la surface quand le rayon varie, ni le rayon quand la surface vient à changer ou, du moins, elle ne l'indique qu'implicitement. Pour connaître l'un des éléments au moyen de l'autre, il faut trouver le moyen de rendre l'équation explicite par rapport à l'élément inconnu (dégager l'inconnue) ce qui revient à donner le tableau des opérations à effectuer au moyen de l'élément connu pour avoir l'autre. Ce tableau porte le nom de formule.

Si nous avons besoin de la surface, nous dirons qu'elle est égale au produit du carré du rayon par le nombre constant π

$$S = R^2 \times \pi$$

Si nous voulons le rayon, nous dirons qu'il est égal à la racine carrée du quotient de la division de la surface par ce même nombre π

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Mais toutes les transformations ne sont pas aussi simples que celles-ci. Il en est, et beaucoup, qui ont résisté jusqu'à présent et résisteront, toujours peut-être, aux efforts des plus puissants esprits.

L'algèbre, on le voit, nous aide à tirer parti de nos découvertes et augmente notre puissance deductive mais cette science n'en est pas moins un auxiliaire de l'induction et bien des découvertes seraient impossibles sans elle.

Toute observation, toute expérimentation aboutissent à la détermination d'une suite de nombres, incohérents en apparence et la loi du phénomène est trouvée au qu'on a pu établir entre ces nombres une filiation régulière.

Si, par exemple, on étudie la chute des corps sur un plan incliné, comme l'a fait Galilée, on trouve qu'en arrêtant le mobile après une chute de 1 seconde, 2^s, 3^s, 4^s, 5^s — — —

les espaces parcourus sur le plan seront respectivement 1 mètre, 4^m, 9^m, 16^m, 25^m — — —

et si l'on remarque que les nombres qui forment la seconde suite sont les carrés de ceux qui leur correspondent dans la première, on a un premier aperçu de la loi qu'on énonce en disant que les espaces sont égaux aux carrés de temps.

Ce n'est pas ainsi que Galilée a trouvé la loi. Il observa en faisant rouler une bille sur un plan incliné que les espaces parcourus pendant la première, la deuxième, la troisième, &c... secondes de la chute étaient entre eux comme la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, ... ce qui n'indique que d'une manière trop insuffisante ce que sera l'espace parcouru pendant un nombre donné de secondes.

Mais la connaissance de la formule des progressions permet de résoudre la question

(Une progression arithmétique est une série ou suite de termes dont chacun s'obtient en ajoutant au précédent un nombre constant appelé raison de la progression.

$a, b, c, d, \dots, i, n, l$

étant les différents termes, et la raison étant désignée par r , on voit aisément que le dernier terme est égal au premier augmenté d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.

n exprimant le rang du dernier terme l .

$$\text{on a: } l = a + (n-1) \times r$$

De plus, la somme des n termes est égale à n fois la demi-somme du premier et du dernier.

$$S = \frac{a+l}{2} \times n$$

(car $a+l = b+k = c+i \dots$) D'où résulte en remplaçant l par la valeur trouvée plus haut que

$$S = \frac{a + [a + (n-1)r]}{2} \times n = \frac{2an + n(n-1)r}{2} = an + \frac{n^2 - n}{2} r.$$

Dans la suite des nombres impairs, progression arithmétique dont la raison est 2 et le premier terme 1, la formule générale se réduit à $S = n^2$.

Or, n exprime dans le problème de Galilée, le nombre de secondes ou le temps de la chute, S exprime l'espace parcouru par le mobile pendant ce temps; on voit donc que les espaces sont proportionnels aux carrés des temps, ce qu'il eût été impossible de trouver avec les seuls résultats de l'expérience.

Si, maintenant, on fait varier l'inclinaison du plan

on trouve les nombres de la première suite restant les mêmes. Les secondes sont tous multipliés par un même nombre qui dépend de cette inclinaison et l'on conclut, en disant que les espaces parcourus sont toujours proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir par le corps qui tombe. Il ne faut pas croire que les nombres trouvés présentent cette proportionnalité rigoureuse car la résistance de l'air, le frottement, l'impossibilité d'arrêter le mouvement juste au bout d'une seconde, &c, &c, rendent très difficile l'interprétation des résultats de la mesure. Il faut faire abstraction de toutes ces influences perturbatrices, introduire ce qu'on nomme en astronomie des coefficients de déflexion, lesquels ne peuvent être qu'approximatifs; c'est alors qu'intervient l'algèbre. Parmi les séries étudiées par cette science, on choisit celle qui se rapproche le plus de la série donnée par l'observation du phénomène considéré, sans à en vérifier ensuite l'exactitude. On procède donc par tâtonnements successifs, en commençant par ce qu'il y a de plus simple et compliquant de plus en plus selon les besoins, le degré de précision étant indiqué par l'application pratique.

Il y a plus; l'observation convenablement corrigée, peut conduire à des séries moins simplifiées.

