

para isso que na fórmula (a) tomar de cada raiz
cubica da quantidade $(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}})$ e dividido mul-
tiplicar de $\text{por}(-\frac{p}{3})$ tem-se a raiz cubica correspon-
da quantidade de $(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}})$ Bernoulli

(J. A. Serret) Resoluções das equações do 3º grau
- Método de Herdette - 18 $\frac{21}{3}$ 79

Seja a equação $x^3 + px + q = 0$ que supponhamos de-
barrada do seu 2º termo - i.e. como $x = y + z$, e q
da $(y+z)^3 + p(y+z) + q = 0$ em $(y^3 + z^3 + q) + (y+z)(3yz + p) = 0$
Igualando a zero o 2º factor da 2ª parte, tira:
 $3yz + p = 0$, donde $z = -\frac{p}{3y}$. Substituindo no
valor de x tira:

$$(3) \quad x = y - \frac{p}{3y} \quad \text{ou} \quad y^3 - py + \frac{p^3}{3} = 0 \quad \text{cham. prim. (3')}$$

Este o producto das duas raizes da 2ª equação -

A equação (3') reduz-se a

$$y^3 - \frac{p^3}{27y^3} + q = 0 \quad \text{ou} \quad y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (\text{4})$$

convertendo a mesma forma mettendo $y = -\frac{p}{3y}$, como
é facil verificar -

Da última equação se tira $y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

O valor de z averá pois $z = -\frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$, e o de

de $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$ (a)

Pod-se por de a e se a forma diversa mas
equivale a esta. Para isso notemos que o de

para isso que na fórmula (a) toma-se do lado direito
 o valor da quantidade $(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}})$ e substituído mul-
 tiplicando por $(-\frac{p}{3})$ tem-se a raiz cubica corresponden-
 te a quantidade de $(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}})$ Bernoulli

(J. A. Serret) Resoluções das equações do 3º grau
 - Método de Sturddle - 18 $\frac{21}{3}$ 79

Deixa a equação $v^3 + pv + q = 0$ que supponhamos descom-
 posta da do seu 2º termo - vamos a $v = y + z$, e q
 da $(y+z)^3 + p(y+z) + q = 0$ ou $(y^3 + z^3 + 3yz(y+z) + p(y+z) + q) = 0$
 Igualando a zero o factor da 2ª parte, tira-se:
 $3yz + p = 0$, donde $z = -\frac{p}{3y}$. Substituindo no
 valor de v tira-se:

(3) $v = y - \frac{p}{3y}$ ou $y^3 - vy + \frac{p^3}{3} = 0$ e assim por (1)

Este o producto das duas raizes da equação -
 a equação (2) reduz-se a
 $y^3 - \frac{p^3}{27y^3} + q = 0$ ou $y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0$ que
 conservando a mesma forma mudando y em $-\frac{p}{3y}$, como
 é facil verificar -

Da última equação se tira $y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

O valor de z será pois $z = -\frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$ e o de
 de $v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$ (a)

Podem-se por a v em a forma diversa mas
 equivalente a esta. Para isso notemos que o de

radicais do 3º grau que entram na expressão do valor de v são idênticos e que considerando somente em v dois raízes cúbicos que correspondem ao sinal (+) do radical do 1º grau, podemos dar os seus raízes de ambas as formas $\sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, $\beta \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.
1, α e β designamos os três raízes cúbicos da unidade.
(Ver as eq. binomias)

Uma como se deduz da equação $y^2 + \frac{p}{3}y - \frac{p^2}{3} = 0$ desprezando o sinal do radical do 2º grau, temos para os $\frac{2}{3}$ dos 3 raízes cúbicos $\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, e para os $\frac{1}{3}$ dos 3 raízes cúbicos de $\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.
Para a eq. (4), que se obtém resolvendo a equação proposta, nos mostra que o produto dos outros dois raízes é igual a $-\frac{p^2}{3}$, e cada um dos dois, se os dois correspondem a dois raízes diferentes, é igual a $(-\frac{p^2}{3})$ e que o produto dos outros raízes é $-\frac{p^2}{3}$.
podemos escrever $\sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = -\frac{p}{3} \sqrt[3]{\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$
então pois substituindo na equação:

$$v = y - \frac{p}{3y}$$

em lugar de y cada um dos três valores acima $\sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, $\alpha \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, $\beta \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, e separando o radical do 1º grau, e os três raízes cúbicos do radical do 2º grau, temos as expressões distintas das que satisfazem a condição de ser o seu produto igual a $-\frac{p^2}{3}$ vimos os três raízes:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\alpha \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \beta \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\beta \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \alpha \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Convenhamos de pôr os radicandos todos os valores

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Formula que resolve a equação geral do 3º grau $v^3 + pv + q = 0$

A.B. Ex. 2º Facilitar a resolução da equação (a) passando desta última forma, obtendo

ing perceptível de ser resolvida a 'maneira
das equações de 2.º grau, o nome de —
reduzida, ou de resolvente: e com efeito —
he por meio da resolução conhecida desta
equação, que se chega á resolução da
proposta.

CMO

1.º. A equação $p = \sqrt{\frac{p^2}{4} + \sqrt{R}} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - \sqrt{R}}$
pode representar as raizes (1, 2) de uma equação
que seja affecta os radicais enteiros das raizes
da unidade (1, 2). Aquella equação he conhecida
pelo nome de regla, ou formula de
Cardan, os primeiros descobridores; mas sempre
observar, que esta formula he defectiva no
caso de ser R , ou $\frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, dando elle
as tres raizes imaginarias, quando as conhecemos
são todas reais; e dá-se a 'opção caso o nome
de — irreductivel.

Toda vez poder-se-a obter a expressões das
tres raizes reais, mediante hypothese, exprimindo
em funções de bichas trigonometricas, mediante
a seguinte transformação: $-\frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -8 \cos^2 \alpha$
 $-\frac{p^2}{4} = 8 \cos^2 \alpha$.

5

Resolução algebraica das Equações de 3.º grau,
segundo o methodo de Vieta.

Seja dada uma equação de 3.º grau sob a forma
seguinte (pois he sempre possível)

$$(1) \quad y^3 + py + q = 0$$

Fazendo $y = y + z$;

sendo (y) alguma nova variavel, e (z) alguma
função de (y), cuja forma pode ser arbitrária —
mente determinada.

Fazendo na equação (1) a conveniente substituição
nova $(y + z)^3 + p(y + z) + q = 0$;
dequã resultam as equações seguintes:

$$(2) \quad y^3 + z^3 + q + 3yz(y + z) + p(y + z) = 0$$

Determinasse o valor de (z) em função de (y),
fazendo na equação (2)

$$3yz + p = 0$$

donde se tira $z = -\frac{p}{3y}$

Substituindo estes valores de (z) na equação
(2) tem-se a equação (1) transformada
na seguinte

$$(3) \quad y + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Resolvendo esta equação pela formula

das equações do 2º grau, sendo (y^3) a incógnita, ter-se-á a seguinte equação do 3º grau a' duas termos

$$y^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

ou

$$(4) \quad y^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}$$

fazendo na equação precedente

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \sqrt{R}$$

ter-se-á portanto

$$(5) \quad y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}}$$

$$y = \frac{-p}{3y} = \frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}}}$$

e finalmente

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{R}}$$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}}}$$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{R}}$$

$$(6) \quad y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}}$$

A equação (6) representa pois a raiz real da equação proposta (1): sendo a bicoeficiente

(7) expressa por coeficientes (p, q) , affectados de radicais quadrados, e cubos.

Para ter a expressão das duas outras raízes da equação, reaes, ou imaginarias, designando por (x) e (y) as duas raízes cubas da equação (1), e (z) a raiz da fundamental raiz (1), a equação a' duas termos (4) dar-á

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}}$$

$$y = x \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}}$$

$$y = x \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}}$$

Então duas ultimas substituições, nas expressões de (2), e de (4), darão

$$(7) \quad y = x \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + x \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}}$$

$$(8) \quad y = x \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + x \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}}$$

As tres equações (6), (7), (8) expressam portanto as tres raízes da equação proposta (1). Lagrange deu a equação (3) do 6º grau,

procedendo-se do seguinte modo.

Designando por (4) mesma quantidade indeterminada, ajuntamos a ambos os membros da equação (2) a quantidade

$$\left(x^2 + \frac{10x}{2}\right)y + \frac{y^2}{4}$$

e temos

$$(3) \left(x^2 + \frac{10x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{10^2}{4} - 9 + 4\right)x^2 + \left(\frac{10x}{2} - x\right)x + \frac{y^2}{4} - s$$

O segundo membro desta equação será sempre quadrado perfeito, dando a indeterminada (4) um valor que satisfizesse a seguinte equação de condições

$$(4) \left(\frac{10x}{2} - x\right)^2 = 4\left(\frac{10^2}{4} - 9 + 4\right)x\left(\frac{y^2}{4} - s\right)$$

Substituindo pois na equação (3) o valor de $\left(\frac{y^2}{4} - s\right)$ tirado desta equação, vem a seguinte

$$\left(x^2 + \frac{10x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{10^2}{4} - 9 + 4\right) \left[x - \frac{\frac{10x}{2} - x}{2\left(\frac{10^2}{4} - 9 + 4\right)} \right]^2$$

Extraindo a raíz quadrada de ambos os membros desta equação, vimos as duas equações do 2.º grau seguintes

$$x^2 + \frac{10x}{2} + \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{10^2}{4} - 9 + 4} \left(x + \frac{\frac{10x}{2} - x}{2\left(\frac{10^2}{4} - 9 + 4\right)} \right)$$

$$x^2 + \frac{10x}{2} + \frac{y}{2} = -\sqrt{\frac{10^2}{4} - 9 + 4} \left(x + \frac{\frac{10x}{2} - x}{2\left(\frac{10^2}{4} - 9 + 4\right)} \right)$$

Estas equações dixeram-se por postar sob a seguinte forma, para serem resolvidas

$$(5) x^2 + \left(\frac{10}{2} + \sqrt{\frac{10^2}{4} - 9 + 4}\right)x = -\left[\frac{y}{2} + \frac{\frac{10x}{2} - x}{2\sqrt{\frac{10^2}{4} - 9 + 4}}\right]$$

$$(6) x^2 + \left(\frac{10}{2} - \sqrt{\frac{10^2}{4} - 9 + 4}\right)x = -\left[\frac{y}{2} - \frac{\frac{10x}{2} - x}{2\sqrt{\frac{10^2}{4} - 9 + 4}}\right]$$

As equações do 2.º grau (5, e 6) terão entre as quatro raízes da equação (1), representadas por (x_1, x_2, x_3, x_4) , expressões nos seus coeficientes, e os valores da indeterminada (y), o qual será sempre dado pela equação de condições (4), mediante a resolução da equação do 3.º grau que della resulta: a saber

$$(7) y^3 - 9y^2 + (10x - 45)y - s(\frac{10^2}{4} - 49) - x^2 = 0$$

Estas equações serão pois a resolução — ou a — Resolução — para as equações do 4.º grau, sendo a denominação de Lagrange

LMG

Resolução algébrica das Equações do 4º grau,
segundo o methodo de — Ferrari — o mais simples,
mas obsteuto por o mais antigo.

Seja dada a equação geral do 4º grau

$$(1) \quad x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

sendo (x) a incógnita, (p, q, r, s) coefficientes, e
cibos.

Transforma a equação (1) da seguinte forma

$$x^4 + px^3 = -qx^2 - rx - s$$

ajunta-se a ambos os lados membros a quantidade

$$\left(\frac{p^2 x^2}{4}\right); e ter-se-a$$

$$(2) \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4} - q\right)x^2 - rx - s$$

É evidente, que, se o segundo membro da
equação for quadrado perfeito, o que he possível
em algum caso particular, sendo para isto bastante
que tenha logar a seguinte equação de condicio

$$r^2 = 4\left(\frac{p^2}{4} - q\right)(-s);$$

extraído a raíz quadrada de ambos os lados

membros, virão duas differentes equações da

2º grau, as quaes sendo resolvidas darão as 4

raizes da equação proposta (1).

O engenhoso methodo de Ferrari — consiste

por em submeter a equação proposta (1) a esta

condicio, quaesquer que dize as coefficientes (p, q, r, s);

Pelo teorema de Moivre, tem-se

$$\sqrt[3]{\cos q + i \sin q} = (\cos q + i \sin q)^{\frac{1}{3}} = \dots$$

$$\cos \frac{q+2k\pi}{3} + i \sqrt[3]{-1} \sin \frac{q+2k\pi}{3}$$

$$\sqrt[3]{\cos q - i \sin q} = (\cos q - i \sin q)^{\frac{1}{3}} = \dots$$

$$\cos \frac{q+2k\pi}{3} - i \sqrt[3]{-1} \sin \frac{q+2k\pi}{3}$$

Substituindo estes valores na fórmula (3)

tem-se a seguinte

$$(4) \quad r = 2 \sqrt[3]{g} \cos \frac{q+2k\pi}{3}$$

Esta equação exprime, portanto, em linhas trigonométricas as três raízes reais da equação proposta, dando os valores de $(0, 1, 2)$ a índice terminada (k) ; e substituindo por (q, π) os valores conhecidos, a saber

$$g = \arccos \left(\cos \frac{-q}{2} \sqrt[3]{\frac{-10^3}{27}} \right), \quad \pi = 360^\circ$$

tem-se a finalmente

$$(5) \quad r = 2 \sqrt[3]{g} \cos \frac{q}{3}, \quad r = 2 \sqrt[3]{g} \cos \frac{q+2\pi}{3}, \quad r = 2 \sqrt[3]{g} \cos \frac{q+4\pi}{3}$$

Obtemos, assim, as três raízes da qual dependem os três valores de (k) serem determinados pelos valores trigonométricos.

Exemplos do 3.º grau — Casos irreductíveis

Dada a equação $x^3 + px + q = 0$;

cujas raízes têm por expressões guardadas, sendo a fórmula de Cardan,

$$(1) \quad x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{R}},$$

sendo $R = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$;

ter-se-á o caso irreductível, quando

$$\Delta R = -\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0.$$

Nesta hypothese a fórmula (1) exprime as tres raízes da equação sob a forma imaginaria, quando não ellej reaes.

Passa-se a expressões depois de se ir sob a forma real, fazendo

$$(2) \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -S^2 \cos^2 \varphi, \quad -\frac{q}{2} = S \cos \varphi$$

Estas equações dadas os valores das indeteminadas

das (8, 9) expressos em (10, 9), do modo

seguinte

$$S = \sqrt{\frac{-\frac{q^2}{4}}{27}}, \quad \cos \varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\frac{-\frac{q^2}{4}}{27}}}$$

Substituindo os valores (2) na fórmula

(1), vem

$$(3) \quad x = \sqrt[3]{S} \left(\sqrt[3]{\cos^2 \varphi + i \cos \varphi} + \sqrt[3]{\cos^2 \varphi - i \cos \varphi} \right)$$