

Respeitavel collega. Sr. Dr. Benjamin C.
Botelho de Albuquerque.

S. C. 8 de Dezembro de 1887.

Fallar de calculo a um antigo e insigne professor de calculo, e' inqualificavel audacia; mas eu sigo uma vida tao diversa e, se posso dizer, tao material, que quando encontro nas minhas horas de distracção algum resultado que me pareça serio, gosto de entregal-o aos entendidos, para que o corrijam, e usem d'elle como lhes approuver. Tendo para distrahir-me em minhas horas vagas algumas integrações, cheguei a um resultado, que me parece de alguma importancia, e por isso submetto-o ao seu alto juizo. Tracta-se da integração dos radicais da segunda ordem, questa seria, e para cuja resolução não existe um meio geral, chegando-se somente a series muito longas, se não infinitas. Eis o que achei: Tomemos o binomio $x^3 - 2x^5$ e integremol-o, achamos $\int dx (x^3 - 2x^5) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{6}x^6$; integremos agora a expressão $dx \sqrt{x^5 - 4x^8 + 4x^{10}}$, identica a primeira, mas facemos a integração sob o radical, e teremos: $\int dx \sqrt{x^5 - 4x^8 + 4x^{10}} = \int \sqrt{dx (x^5 - 4x^8 + 4x^{10})} = \int \sqrt{dx (\frac{1}{7}x^7 - \frac{4}{9}x^9 + \frac{4}{11}x^{11})} = \sqrt{\frac{1}{56}x^8 - \frac{4}{90}x^{10} + \frac{4}{132}x^{12}}$. Ora, para que este resultado seja exacto, e' necessario que a quantidade submettida ao ultimo radical seja o quadrado perfeito de $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{6}x^6$; isto e', igual a $\frac{1}{16}x^8 - \frac{1}{6}x^{10} + \frac{1}{9}x^{12}$; e e' o que não vemos; se, porém, multiplicarmos os termos submettidos ao radical por seus respectivos expoentes, teremos: $\sqrt{\frac{8}{56}x^8 - \frac{40}{90}x^{10} + \frac{48}{132}x^{12}} = \sqrt{\frac{1}{7}x^8 - \frac{4}{9}x^{10} + \frac{4}{11}x^{12}}$; se agora juntarmos ao denominador do primeiro termo o numero = 9, ao do segundo o numero 15, e ao do terceiro o numero 25, obteremos $\sqrt{\frac{1}{16}x^8 - \frac{1}{6}x^{10} + \frac{1}{9}x^{12}} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{6}x^6$.

Vejamos agora que números são esses, que junctei aos denominadores dos tres termos: Se fizermos o expoente (8) do primeiro termo igual a $2m+2$, teremos $m=3$, isto é, a raíz quadrada de 9, numero que junctei ao denominador do dicto primeiro termo; se fizermos o expoente do terceiro (12) igual a $2n+2$, teremos $n=5$, isto é, a raíz quadrada de 25, que junctei ao denominador do dicto 3º termo; o numero 15, que junctei ao denominador do segundo termo é igual ao producto $m \times n$. Assim pois, para integrar um trinomio submettido ao radical, estando dx fora, eu integro duas vezes de baixo do radical, depois multiplico cada termo pela respectivo expoente de x , e juncto aos denominadores, do primeiro = m^2 , do segundo = $m.n$, e do terceiro = n^2 , obtidos os valores de m e n pelo modo por que expuz; isto é, se o primeiro expoente for = r e o terceiro = s , $m = \frac{r-2}{2}$, $n = \frac{s-2}{2}$.

Appliquemos a um outro exemplo. Seja $(x-x^5)$ o binomio a integrar, e cujo quadrado é $x^2-2x^5+x^{10}$; temos $\int dx(x-x^5) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^6$. $\int dx \sqrt{x^2-2x^5+x^{10}} = \int dx \sqrt{dx(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{7}x^7 + \frac{1}{11}x^{11})} = \int \sqrt{\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{28}x^8 + \frac{1}{132}x^{12}} dx$. (Desculpa os signos de igualdade que ahi empregue somente para indicar a marcha do calculo, visto que a verdadeira integral é a obtida depois das reduções.) Multiplicando pelos expoentes, temos $\sqrt{\frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{7}x^8 + \frac{1}{11}x^{12}}$, e sendo $m = \frac{4-2}{2} = 1$, $n = \frac{12-2}{2} = 5$, temos $m^2 = 1$, $n^2 = 25$ e $m.n = 5$, e juctando-os aos denominadores vem $\sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^8 + \frac{1}{36}x^{12}} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^6$.

É uma lei geral, que verifiquei em mais de 50 exemplos. Ha uma excepção somente, e é quando o expoente do segundo termo é impar, pois neste

caso, em vez de $m.n$, se junta ao denominador desse termo $\frac{1}{2}m.n$, facto devido ás reduções operadas no correr do calculo.

Os coefficients das potencias de x , que não dependam das integrações, não influem, e o facto dos expoentes dos termos extremos serem impares tambem não influencia a lei. No caso em que o expoente de x no primeiro termo do trinomio submettido ao ultimo radical for 2, o trabalho se simplifica, pois, $m=0$, $m.n=0$.

Exemplifiquemos; seja primeiro: $\int dx(x-x^2) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$,
 $\int dx \sqrt{dx(x^2-2x^3+x^4)} = \int \sqrt{dx(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5)} = \sqrt{\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{30}x^6}$;
multiplicando pelos expoentes, effectuando as reduções, e depois juntando ao denominador do 1º termo, 1; ao do segundo 4 ou $\frac{1}{2}m.n$, e ao do terceiro 4, temos

$$\sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{9}x^6} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

2º Exemplo. $\int dx(1-x^9) = x - \frac{1}{10}x^{10}$. $\int \sqrt{dx} \sqrt{dx(1-2x^9+x^{18})}$
 $= \int \sqrt{dx(x - \frac{1}{5}x^{10} + \frac{1}{9}x^9)} = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{55}x^{11} + \frac{1}{380}x^{20}}$; como $m=0$, e bem assim $m.n=0$, depois de multiplicar pelos expoentes, nada temos a junter ao denominadores do 1º e 2º termos, somente juntaremos ao do terceiro 81, e obteremos

$$\int dx \sqrt{1-2x^9+x^{18}} = \sqrt{x^2 - \frac{1}{5}x^{11} + \frac{1}{100}x^{20}} = x - \frac{1}{10}x^{10}.$$

Seja ainda $\int dx(a-x) = ax - \frac{x^2}{2}$; $\int \sqrt{dx} \sqrt{dx(a^2-2ax+x^2)}$
 $= \int \sqrt{dx(ax^2 - ax^2 + \frac{1}{2}x^3)} = \sqrt{\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{12}x^4}$; effectuando as multiplicações pelos expoentes, reduzindo e depois juntando ao denominador do terceiro = 1, temos $\int dx \sqrt{1-2x^9+x^{18}} =$
 $= \sqrt{ax^2 - ax^3 + \frac{1}{4}x^4}$, sem que o coefficiente (a) tenha influenciado a lei.

Consideremos agora o monomio $\sin x \cdot \cos x$, temos
 $\int \sin x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$; $\int dx \sqrt{\sin x \cdot \cos x} = \int \sqrt{dx} \sqrt{dx(\cos^2 x - \cos^4 x)}$
 $= \int \sqrt{\cos x dx} \sqrt{\cos x dx} \cdot \sin x = \int \sqrt{\cos x dx} \cdot \frac{1}{3} \sin^3 x = \sqrt{\frac{1}{12} \sin^4 x}$, fazendo as

mesmas operações que acima. teremos $\sqrt{\frac{1}{4}\sin^4 x} = \frac{1}{2}\sin^2 x$.

Terminemos fazendo applicação ao trinomio $(1+x+x^2)$,

cuj quadrado é $(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)$; $\int dx(1+x+x^2) =$

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3; \quad \int \sqrt{dx} \sqrt{dx(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)} = \int \sqrt{dx(x+x^2+x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^5)} =$$

$= \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{30}x^6}$. Aqui convem-nos attender que o termo $\frac{1}{4}x^4$ é a somma de $\frac{1}{12}x^4$ e $\frac{2}{12}x^4$, e então reduzi-

remos assim $\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{12}x^4 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{30}x^6}$ se teremos

$$\sqrt{x^2+x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{9}x^6} = \sqrt{x^2+x^3+\frac{11}{12}x^4+\frac{1}{3}x^5+\frac{1}{9}x^6} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Escolhi de proposito que as quantidades a integrar sob o radical fossem quadrados perfectos, a fim de ter á vista a verificação, e creio que nenhuma razão influe para a não applicação da lei, quando não se dê tal condição; assim acho que: $\int dx \sqrt{1-\sin^2 x} =$

$$\int \sqrt{\cos x dx} \sqrt{\cos x dx (1+\sin^2 x + \sin^4 x)} = \int \sqrt{\cos x dx (\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x)}$$

$= \sqrt{\frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{12}\sin^4 x + \frac{1}{30}\sin^6 x}$. Se seguirmos a applicação

da regra precedente teremos: $\int dx \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^4 x + \frac{1}{15}\sin^6 x}$.

Fui longo, mas espero desculpe-me de V. S. S.

At. V. S. M. O. S. e. C. S.

Francis Raymundo Ernesto Lemos.

S.

$$\int dx \sqrt{1-e^2 \sin^2 x} = \sqrt{(1-\frac{1}{2}e^2)x^2 + \frac{1}{2}e^2 \sin^2 x}.$$

Lemos